平成１５年度数理統計短期集合研修
（基礎編）

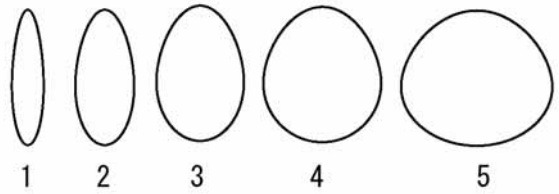
「Rによる統計解析」

「R」があればここまでできる！
輪郭曲線のフーリエ解析

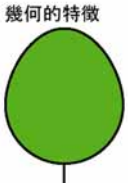
岩田洋佳（中央農研）

従来の「かたち」の評価法

スコアリング



幾何的特徴



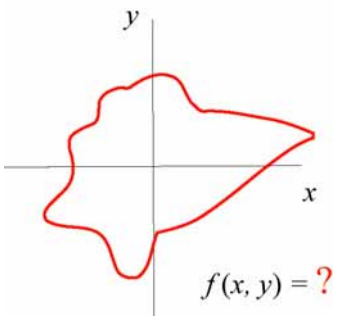
長さの比　（縦横比 など）

面積／（周囲長）^{2}
円の場合：$\pi r^2 / (2\pi r)^2 = 1 / 2\pi$

角度　（頂部や基部の角度 など）

- 事前の定義が必要
- 部分的な特徴の評価
- 正確性、再現性に問題

輪郭の定量的記述法



輪郭そのものを数学的に記述

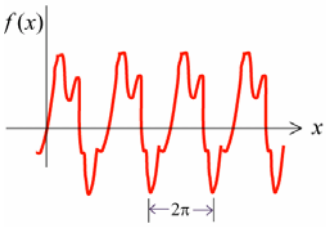
- フーリエ記述子
- モーメント不変量 (Hu 1962)
- eigenshape analysis (Lohman 1983)

など

フーリエ記述子 → 輪郭を周期関数として捉え、その関数のフーリエ変換を行い、その係数を「かたち」の記述に用いる

フーリエ変換

性質のよくわからない関数を性質のよく知れた三角関数 sin *nx*, cos *nx* (*n* = 0, 1, 2, ...) の重ね合わせ（線形結合）として表す方法



→ 「周期2π の任意の周期関数はフーリエ級数に展開できる」(J.B.J. Fourier, 1768-1830)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ここで、

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx$$

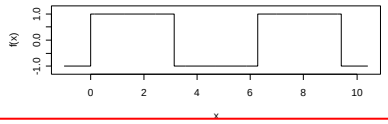
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx$$

→ **数学的取り扱いが楽になる**

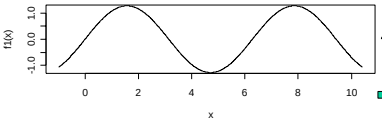
フーリエ変換 の例

$$f(x)=\begin{cases}1 & (0\le x<\pi)\\ -1 & (\pi\le x<2\pi)\end{cases}$$

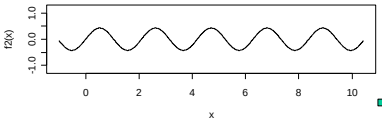
$$f(x+2\pi)=f(x)$$



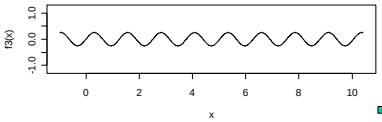
$$f_1(x)=\frac{4}{\pi}\sin x$$



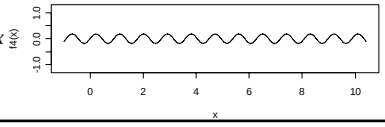
$$f_2(x)=\frac{4}{3\pi}\sin 3x$$

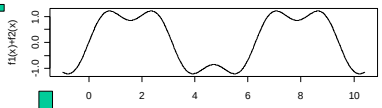


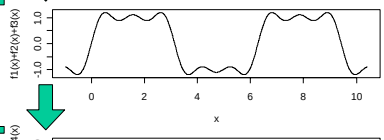
$$f_3(x)=\frac{4}{5\pi}\sin 5x$$

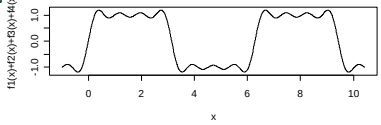


$$f_4(x)=\frac{4}{7\pi}\sin 7x$$



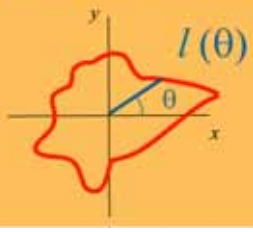






中心極（CP）フーリエ記述子

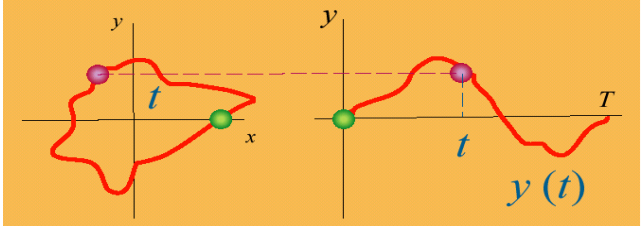
輪郭の重心やランドマークを中心点として
この点から輪郭上の点までの距離を角度の
関数としてとらえる方法 (Lu 1965)



$$l(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum\left(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right)$$

楕円（E）フーリエ記述子

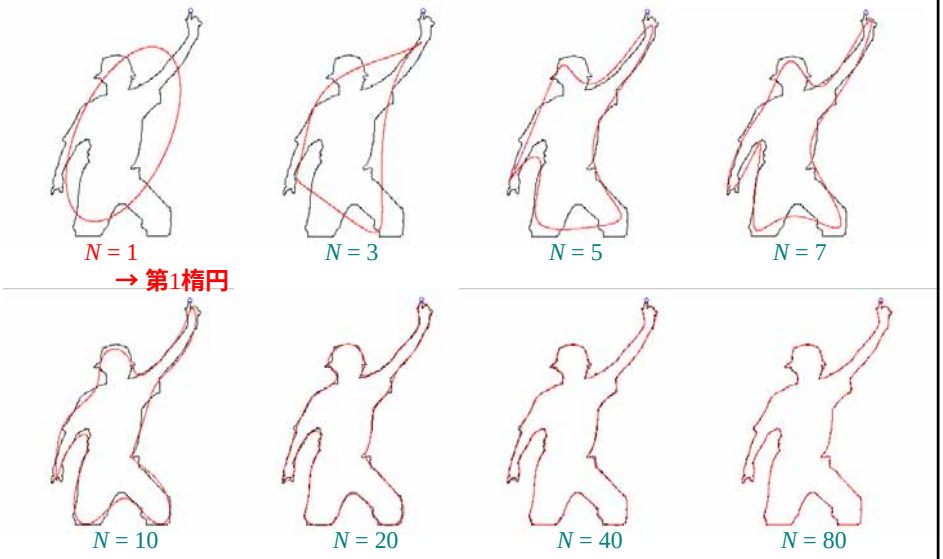
輪郭をx,y平面に投影し、輪郭のなす曲線のx座標とy座標を、それぞれ弧長の関数としてとらえる方法 (Kuhl and Giardina 1982)



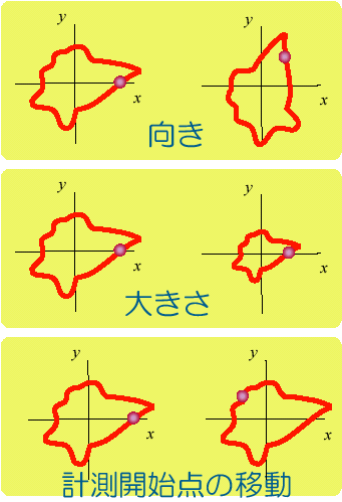
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum\left(a_n \cos\frac{2n\pi t}{T} + b_n \sin\frac{2n\pi t}{T}\right)$$

$$y(t) = \frac{c_0}{2} + \sum\left(c_n \cos\frac{2n\pi t}{T} + d_n \sin\frac{2n\pi t}{T}\right)$$

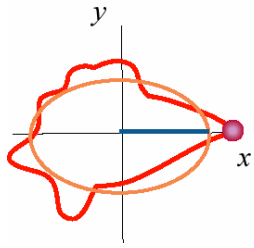
フーリエ記述子による輪郭の再構築



記述子の標準化



$$x(t) = \sum^{N}(a_n\cos 2n\pi t/T + b_n\sin 2n\pi t/T)$$
$$y(t) = \sum^{N}(c_n\cos 2n\pi t/T + d_n\sin 2n\pi t/T)$$



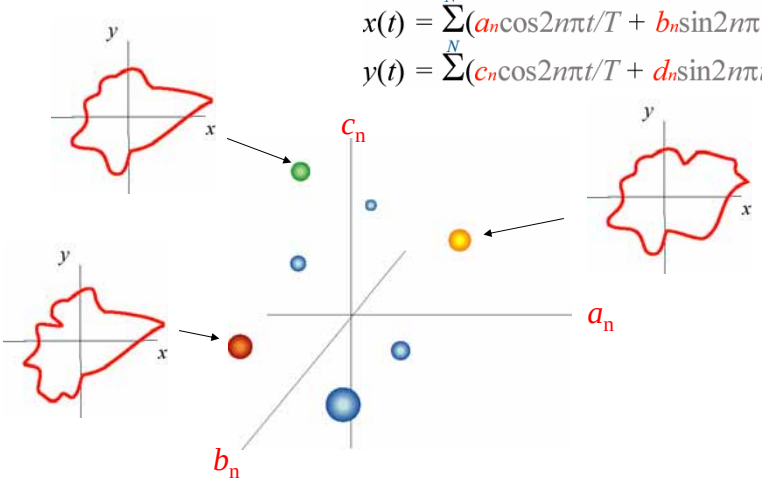
N=1のとき楕円になることを利用して（第1調和楕円）

楕円の半長軸を基準にサイズ、向き、計測開始点について標準化

楕円フーリエ記述子による「かたち」の評価

ひとつの輪郭を、多次元空間中のひとつの点として表現

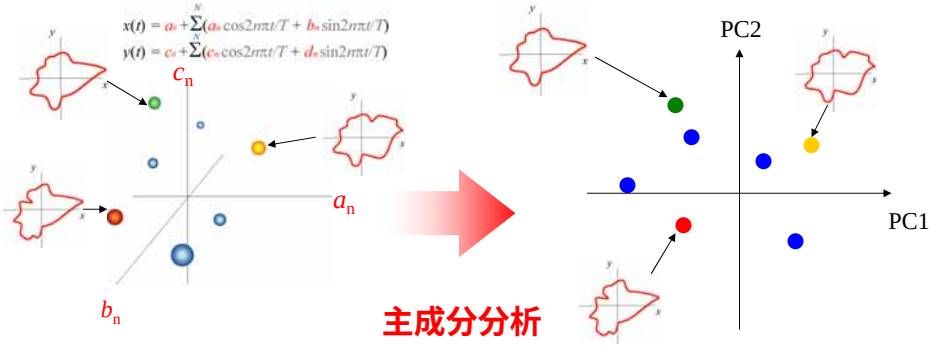
$$x(t) = \sum^{N}(a_n\cos 2n\pi t/T + b_n\sin 2n\pi t/T)$$
$$y(t) = \sum^{N}(c_n\cos 2n\pi t/T + d_n\sin 2n\pi t/T)$$



楕円フーリエ記述子による「かたち」の評価

独立した「かたち」の特徴を主成分分析により抽出.

$$x(t) = a_0 + \sum^{N}(a_n \cos 2n\pi t/T + b_n \sin 2n\pi t/T)$$
$$y(t) = c_0 + \sum^{N}(c_n \cos 2n\pi t/T + d_n \sin 2n\pi t/T)$$



楕円フーリエ記述子による
高次元空間
(77 次元)

楕円フーリエ記述子の主成分による
低い次元の空間
(数次元)

たとえば、 を主成分得点でPC1=1.2、PC2=0.8と表せる

逆変換による主成分の意味の視覚化

第1主成分の固有ベクトル

フーリエ記述子から主成分得点の計算

第1主成分得点

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{00} & v_{01} & \cdots & v_{0n} \\ v_{10} & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ v_{n0} & v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_m \end{bmatrix}$$

楕円フーリエ記述子

主成分得点からフーリエ記述子の計算

±2S.D. (固有値の平方根)

固有ベクトル行列
の転置行列

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{00} & v_{10} & \cdots & v_{n0} \\ v_{01} & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ v_{0n} & v_{1n} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_n \end{bmatrix}$$

$$x(t) = a_0 + \sum^{N}(a_n \cos 2n\pi t/T + b_n \sin 2n\pi t/T)$$
$$y(t) = c_0 + \sum^{N}(c_n \cos 2n\pi t/T + d_n \sin 2n\pi t/T)$$

フーリエ逆変換による輪郭の再構成

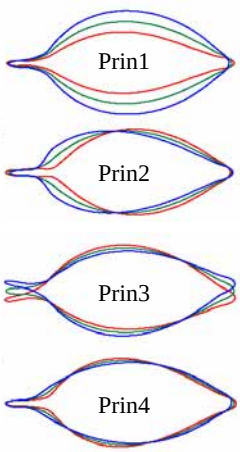
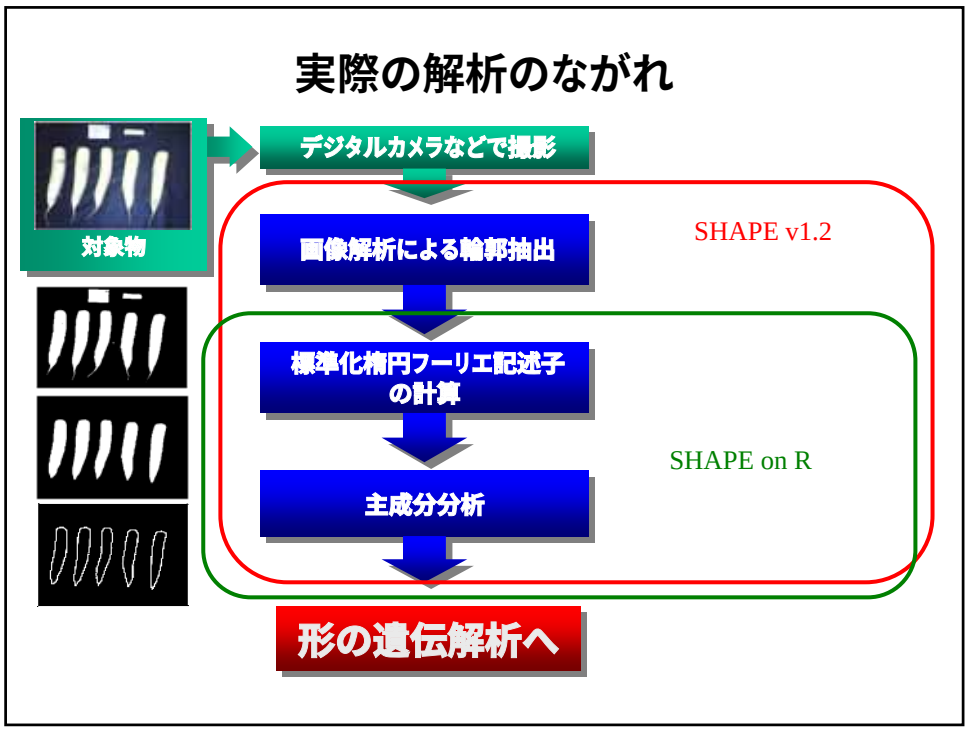


図. カンキツ葉形の主成分の意味


実際の解析のながれ
対象物
デジタルカメラなどで撮影
画像解析による輪郭抽出
SHAPE v1.2
標準化楕円フーリエ記述子の計算
SHAPE on R
主成分分析
形の遺伝解析へ